Licence V.T.E.S L2 3ème semestre .... Mathématiques M3

Fiche no. 5 Fonctions dérivables, TAF

Exercice 1. Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur $]0,1[$. Sont-elles dérivables à droite en 0 ? dérivables à gauche en 1?

1. $f(x) = \sqrt{x(1-x)}$.
2. $f(x) = x^{2/3}(1-x)^{3/2}$.

Exercice 2. Déterminer les valeurs a et b telles que les fonctions suivantes soient de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ ax+b & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x^2e^{1-x} - 2 & \text{si } x \geq 1 \\ axe^{bx^2} & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

Exercice 3. Utiliser le théorème des accroissements finis pour donner un majorant des réels suivants.

$$\begin{array}{llll} 1) & \sqrt{10001} - 100 & 2) & 0,001 - \frac{1}{1003} \\ 3) & 1 - \cos(0,002) & 4) & \ln(1,001). \end{array}$$

Exercice 4. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

1. En utilisant le TAF, montrer que
$$\frac{1}{2\sqrt{b}} < \frac{\sqrt{b} - \sqrt{a}}{b-a} < \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$
2. On pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $s_n > 2\sqrt{n+1} - 2$. (Indication: utiliser l'inégalité de la partie 1 avec $a = k$ et $b = k+1$.)
3. En déduire que la série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k}}$ est divergente.

Exercice 5. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 < a < b$.

1. En utilisant le TAF, montrer que
$$\frac{1}{b} < \frac{\ln b - \ln a}{b-a} < \frac{1}{a}.$$
2. On pose $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $s_n > \ln(n+1)$. En déduire que la série $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ est divergente.