Licence V.T.E.S L2 3ème semestre .... Mathématiques M3

Fiche no. 4 Fonctions continues sur un intervalle

Exercice 1. Pour les fonctions suivantes, déterminer l'image $f(I)$.

1. $f(x) = \sin(2x)$, $I = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}]$.
2. $f(x) = x^2 + x + 3$, $I = [1, \infty[$.
3. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $I = \mathbf{R}$.

Exercice 2. Les équations suivantes admettent-elles au moins une solution dans l'intervalle donné ?

1. $x^7 - 3x^2 + 4x - 1 = 0$, $x \in [-1, 1]$
2. $x^{29} + 14x^{17} - 7x^5 + 2 = 0$, $x \in [-1, 1]$.
3. $e^x + x^2 = 3$, $x \in [1, 3]$.

Exercice 3. On considère la fonction $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$. sur $I =]-1, \infty[$.

1. Montrer que f est monotone sur I.
2. Déterminer $J = f(I)$.
3. Trouver la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ de f.

Exercice 4. Montrer que les fonctions suivantes sont monotones sur leur domaine de définition et déterminer leur réciproque.

1. $f(x) = \frac{e^x-3}{e^x+1}$
2. $g(x) = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
3. $h(x) = \sqrt{x-3} + 1$.

Exercice 5. Etudier les variations de $f(x) = x^5 - 5x + 1$ sur $\mathbf{R}$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet trois solutions réelles.

Exercice 6. Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$ une fonction continue. Montrer que f admet un point fixe, c.à.d. il existe c tel que $f(c) = c$. (Indication: regarder la fonction $g(x) = f(x) - x$.)