1 Suites

Une *suite numérique* est une suite de nombres réels, indexée par les entiers naturels: $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Exemples.

1. $u_n = n + 2$: $(u_n) = \{2, 3, 4, \ldots\}$.
2. $u_n = n^2$: $(u_n) = \{0, 1, 4, 9, 16, \ldots\}$.

Remarque. Parfois une suite n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, par exemple la suite $u_n = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$ est définie pour $n \geq 3$.

Suite Majorée, Minorée, Bornée.

Une suite (u_n) est

- *majorée* s'il existe M_1 tel que $u_n \leq M_1$ pour tout n
- *minorée* s'il existe M_2 tel que $u_n \geq M_2$ pour tout n
- *bornée* si elle est majorée et minorée.

Exemples. $u_n = 1 - n$, $v_n = 2 + n^2$, $w_n = 3 + (-1)^n$. La suite (u_n) est majorée (par 1), (v_n) est minorée (par 2), et (w_n) est bornée: $2 \leq w_n \leq 4$ pour tout n.

Suite Croissante, Décroissante, Monotone.

Une suite (u_n) est

- *croissante* si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout n. Notation: $(u_n) \nearrow$
- *décroissante* si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout n. Notation: $(u_n) \searrow$
- *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Exemples. $u_n = n^3 + n + 2$, $v_n = 2^{-n}$. On a $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$.

Limite d'une suite; suite convergente, divergente

Une suite (u_n) est *convergente* s'il existe un nombre réel ℓ tel que u_n tend vers ℓ quand n tend vers ∞. Notation

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell.$$

On appelle ℓ la limite de la suite (unique, si elle existe). Une suite (u_n) est *divergente* si elle n'est pas convergente.

Il y a deux types de suites divergentes:

1. $u_n \to \infty$ ou $u_n \to -\infty$ quand $n \to \infty$: la limite de u_n existe, mais n'est pas un nombre réel. (Exemples: $u_n = n^2$, $u_n = -e^n$.)

2. La limite de (u_n) n'existe pas (Exemple: La suite alternée $u_n = (-1)^n$.)

Exemples de suites.

1. *Suite arithmétique:* $u_{n+1} = u_n + r$. Alors $u_n = u_0 + rn$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \infty & r > 0 \\ u_0 & r = 0 \\ -\infty & r < 0. \end{cases}$$

2. *Suite géométrique:* $u_{n+1} = q.u_n$. Alors $u_n = q^n.u_0$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} 0 & -1 < q < 1 \\ u_0 & q = 1 \\ \pm\infty & q > 1 \\ \text{pas de limite} & q \leq -1 \end{cases}$$

3. *Suite puissance:* $u_n = n^a$.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \begin{cases} \infty & a > 0 \\ 1 & a = 0 \\ 0 & a < 0. \end{cases}$$

Résultats sur la convergence.

Théorème. Une suite monotone et bornée est convergente.

Théorème. Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell'$ (ℓ et ℓ' des nombres réels), alors

1. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n + v_n = \ell + \ell'$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n . v_n = \ell . \ell'$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'}$ si $\ell' \neq 0$.

Forme indéterminée.
Attention ! A priori on ne peut rien dire sur des limites qui sont des formes indéterminées, c.à.d. des expressions de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$.

Exemple. La suite $u_n = \frac{4n^3+3n^2+1}{5n^3-n-1}$ donne une F.I. $\frac{\infty}{\infty}$. Pour calculer la limite, on divise par la plus grande puissance de n (ici n^3):

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^3}}{5 - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3}} = \frac{4}{5}.$$

Théorème des gendarmes. Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout n, et si

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell,$$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

Soit (v_n) une suite dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang. Une suite (u_n) est *négligeable* par rapport à (v_n) si

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0.$$

Exemple: Une suite polynomiale n^a est négligeable par rapport à une suite exponentielle b^n si $b > 1$.

Suites adjacentes.
Deux suites (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* si

1. $(u_n) \nearrow$ et $(v_n) \searrow$

2. $u_n \leq v_n$ pour tout n

3. $\lim_{n\to\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème. Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et convergent vers la même limite.

2 Initation aux séries

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite. On pose

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \ldots + u_n$$

et on l'appelle la n-ème somme partielle de la suite (u_n). La suite (s_n) s'appelle la *série de terme général* u_n. On note

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n$$

et on l'appelle la somme de la série. On dit que la série est *convergente* si cette somme existe et est un nombre fini, *divergente* sinon.

Attention. Ne pas confondre la *suite* (u_n) et la *série* de terme général de terme u_n !

$$\begin{aligned} \text{La suite } (u_n) \text{ converge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n \text{ existe et est fini} \\ \text{La série } \sum_{n=0}^{\infty} u_n \text{ converge} \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} s_n \text{ existe et est fini.} \end{aligned}$$

Remarques.

1. On considère parfois des séries de la forme $\sum_{n=N}^{\infty} u_n$, c.à.d. on a supprimé les premiers termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ de la série. Ceci n'a pas d'influence sur la convergence de la série.

2. On utilise souvent la même notation $\sum_{n=0} u_n$ pour la série et pour la somme de la série.

Exemple. Calcul de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, $n \geq 1$. On a $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, donc

$$s_n = \sum_{k\geq 1} u_k = (1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\ldots+(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) = 1-\frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n = 1.$$

Condition nécessaire pour la convergence d'une série: si la série de terme général u_n converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. La réciproque est fausse ! (voir l'exemple $u_n = 1/n$ plus tard).

Si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est *grossièrement divergente.*

Exemples.

1. *Série géométrique.* $u_n = a^n$, a un nombre réel.
   - si $|a| < 1$, alors la série converge et $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$.
   - si $a \geq 1$, la série diverge: $\sum_{n=0}^{\infty} a^n = +\infty$.
   - si $a \leq -1$, la série diverge. Dans ce cas, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ n'existe même pas.
2. *Série de Riemann.* $u_n = n^a$, a un nombre réel.
   - si $a < -1$, la série est convergente
   - si $a \geq -1$, la série est divergente.

Exemples.

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ est divergente (bien que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$!)

Opérations sur les séries. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ sont des séries convergentes, alors

- La série $\sum_{n=0} \lambda.u_n$ est convergente pour tout λ et $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda u_n = \lambda. \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

- La série $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n)$ est convergente et $\sum_{n=0}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Comparaison de séries.

- Si $0 \leq u_n \leq v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$ converge, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.
- Si $u_n \leq v_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = +\infty$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = +\infty$.

Convergence absolue. On dit que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge *absolument* si $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ converge. Si $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ congverge absolument, alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge et

$$|\sum_{n=0}^{\infty} u_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

3 Limites et Continuité

Une fonction f est *continue* en a si

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a).$$

On dit que f est continue sur $\mathbf{R}$ si f est continue en a pour tout $a \in \mathbf{R}$.

Théorème.

1. Si f et g sont continues en a, alors $f + g$ et $f.g$ sont continues en a, et $\frac{f}{g}$ est continue en a si $g(a) \neq 0$.
2. Si g est continue en a et f est continue en $g(a)$, alors $f \circ g$ est continue en a.

Exemple. La fonction

$$\frac{e^x(x^4 - 5x + 3)}{2x^6 + x^2 + 2}$$

est continue sur $\mathbf{R}$.

Pour calculer des limites de fonctions, on utilise souvent le
Théorème des gendarmes. Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Exemple (fonction non continue) Soit $E(x)$ la partie entière de x (c.à.d. le plus grand entier n tel que $n \leq x$). La fonction $E(x)$ n'est pas continue en 0 car

$$\lim_{x\to 0^-} E(x) = -1, \quad \lim_{x\to 0^+} E(x) = 0.$$

De même $E(x)$ n'est pas continue en a pour tout $a \in \mathbf{Z}$. La fonction $E(x)$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$.

Prolongement par continuité. On note D_f le domaine de définition de f. Pour $a \notin D_f$ on dit que f est *prolongeable par continuité* en a si

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

avec $\ell \in \mathbf{R}$. Dans ce cas, f devient continue en a si on pose $f(a) = \ell$.

Exemple. Soit $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. La fonction f est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$. Comme

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \quad \text{(limite standard)}$$

on peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

4 Fonctions continues sur un intervalle

Théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soient a et b deux éléments de I. Pour tout nombre réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe un nombre réel c compris entre a et b tel que $f(c) = \lambda$.

Remarques.

1. Il peut y avoir plusieurs valeurs de c qui conviennent dans le TVI. Le nombre c est unique si f est strictement monotone sur I.

2. Le TVI est *faux* pour des fonctions non continues. Si on prend par exemple

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1/2 \\ x+1 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

   il n'existe pas de c entre 0 et 1 tel que $f(c) = 1$.

Conséquences du TVI.

1. Si $f(a).f(b) < 0$ (c.à.d. $f(a)$ et $f(b)$ sont de signe opposé), alors il existe c entre a et b avec $f(c) = 0$.

2. Si I est un intervalle et f est continue, l'image $f(I) = \{f(a) \mid a \in I\}$ est un intervalle.

Une fonction f est *croissante* (resp. strictement croissante) sur I si $f(x) \leq f(y)$ (resp. $f(x) < f(y)$) pour tous les couples (x, y) avec $x \in I$, $y \in I$ et $x < y$. De même f est décroissante (resp. strictement décroissante) si $f(x) \geq f(y)$ (resp. $f(x) > f(y)$) pour tous les couples (x, y) avec $x \in I$, $y \in I$ et $x < y$. On dit que f est monotone si f est croissante ou décroissante sur I, strictement monotone si f est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.

Théorème. Si f est monotone et continue sur $[a, b]$, alors l'image $f([a, b])$ est un intervalle d' extrémités $f(a)$ et $f(b)$ (plus précisément: $[f(a), f(b)]$ si $f \nearrow$, $[f(b), f(a)]$ si $f \searrow$).

Fonction réciproque. Soit f une fonction sur un intervalle I. On pose $J = f(I)$. Si f est strictement monotone et continue sur I, il existe une fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$, c;à.d. une fonction $f^{-1} : J \to I$ telle que

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{et } f(f^{-1}(y)) = y$$

pour tout $x \in I$ et $y \in J$. La fonction réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur J dans le même sens que f.

Exemples.

1. $f(x) = e^x : \mathbf{R} \to]0, \infty[$. On a $f^{-1}(y) = \ln(y) :]0, \infty[\to \mathbf{R}$.

2. $f(x) = \tan(x)$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$. Alors $f(I) = \mathbf{R}$ et $f^{-1}(y) = \arctan(y) : \mathbf{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$.

3. $f(x) = \frac{1}{1+x}$ sur $I =]-1, \infty[$. Comme $f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} < 0$ pour tout $x \in I$, f est strictement décroissante sur I. On a

$$\lim_{x \to (-1)^+} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

donc $J = f(I) =]0, \infty[$. Pour trouver la réciproque de f, on procède comme suivant. On écrit $y = f(x) = \frac{1}{1+x}$, puis on réécrit cette expression pour que x soit une fonction de y:

$$\begin{aligned} y = \frac{1}{1+x} &\iff y(1+x) = 1 \\ &\iff 1 + x = 1/y \\ &\iff x = \frac{1}{y} - 1 = \frac{1-y}{y}. \end{aligned}$$

On a donc $f^{-1}(y) = \frac{1-y}{y}$. La fonction f^{-1} est continue et strictement décroissante sur J.

5 Fonctions dérivables

On dit que f est *dérivable à gauche* en a si la limite

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existe. Dans ce cas on note $f'_\ell(a)$ la valeur de cette limite, et on l'appelle la *dérivée à gauche* de f en a. De même on définit la *dérivée à droite* $f'_r(a)$. On dit que f est *dérivable* en a si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_\ell(a) = f'_r(a)$.Dans ce cas on note $f'(a) = f'_\ell(a) = f'_r(a)$ la *dérivée* de f en a.

On a les théorèmes habituels: si f et g sont dérivables en a, alors $f + g$ et $f.g$ sont dérivables en a et $\frac{f}{g}$ est dérivable en a si $g(a) \neq 0$. La composée $f \circ g$ est dérivable en a si g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$.

Exemples.

1. $f(x) = |x|$ n'est pas dérivable en 0 car $f'_\ell(0) = -1$ et $f'_r(0) = 1$.

2. $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable à droite en 0 car

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x}$$

n'existe pas.

Théorème de Rolle. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque. Le théorème de Rolle est faux si f n'est pas dérivable. Par exemple l'énoncé est faux pour $f(x) = |x|$ sur $[-1, 1]$.

Théorème des accroissements finis (TAF). Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Inégalité des accroissements finis. Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, et s'il existe une constante $C > 0$ telle que $f|'(x)| \leq C$ pour tout $x \in]a, b[$ alors

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

pour tout x, $y \in]a, b[$.

Exemple. On considère $f(x) = \tan(x)$ sur $I =]-\pi/4, \pi/4[$. On a $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan^2(x)+1$. La fonction $\tan(x)$ est croissante sur I et $-1 \leq \tan(x) \leq 1$ pour $x \in I$. Donc $|f'(x)| \leq 2$ pour $x \in I$ et on obtient l'inégalité

$$|\tan(x) - \tan(y)| \leq 2|x - y|$$

pour $x, y \in I$.